群论 第六讲 群的直积与半直积

一个群是其两个子群的直积的条件：(1)每个元素可唯一地分解为两个子群元素的乘积；(2)子群1的元素与子群2的元素之间的乘积是可对易的。

若一个群是其两个子群的直积时，则(1)单位元是这两个子群的唯一公共元素；(2)这两个子群都是不变子群。

由于直积群的各个因子群都是不变子群，故可以定义商群。

6阶循环群Z6是2阶循环群Z2与3阶循环群Z3的直积，即Z6=Z2×Z3

正三角形对称群D3不能分解为3阶循环群Z3与2阶循环群Z2的直积，但D3是Z3与Z2的半直积。

一个群G是其子群G1和G2的半直积群的条件是：(1)G1是G的不变子群；(2)G1与G2的公共元素只有单位元；(3)G的每个元素都可写为G1元素与G2元素的乘积。注：(2)(3)也可合起来表述为：G的每个元素都可唯一地写为G1元素与G2元素的乘积。

更简单直观的表述是：若H是G的不变子群，那么G是H与(G/H)的半直积。

如何构造G1与G2的半直积群？
(1)G1与G2的半直积群的每个元素可以唯一地分解为G1和G2元素的有序乘积。
(2)定义从G2群到G1自同构群之间的一个同态映射，也即是说，把每个G2群元都同态地映射为“从G1到G1的一个映射”。
(3)在G1与G2的半直积群的任两个元素之间定义乘法，这个乘法是由前面那个同态映射诱导出来的：对于G2分量部分，对应分量直接相乘即可。而对于G1分量部分，前一个分量须乘以“后一个分量经过映射之后仍属于G1的像”，这个映射是它越过的G2分量的同态映射的像。

前面定义的“两个群的半直积”确实是一个群。根据定义可知，群乘法的“封闭性”已经被满足；我们只须再验证：群乘法的“结合律”；集合存在单位元；每个元素的逆元也在集合内。

若G是G1与G2的半直积群，则G1是G的不变子群。但一般来说，G2不是G的不变子群。
若G1与G2都是G的不变子群，则G1与G2的半直积群会退化为它们的直积群。可见，半直积群是更一般的定义。

direct product $G = G_1 \times G_2 :\ \ \forall g_{\alpha\beta} \in G,\ \ g_{\alpha\beta} = g_{1\alpha} g_{2\beta} = g_{2\beta} g_{1\alpha},$ with $g_{1\alpha} \in G_1,\ \ g_{2\beta} \in G_2$

$g_{\alpha\beta} g_{\alpha'\beta'} = (g_{1\alpha} g_{1\alpha'})(g_{2\beta} g_{2\beta'}) = (g_{2\beta} g_{2\beta'})(g_{1\alpha} g_{1\alpha'}), \quad e = e_1 e_2, \quad g_{\alpha\beta}^{-1} = g_{1\alpha}^{-1} g_{2\beta}^{-1}$

$O(3) = SO(3) \times \{\mathbf{1}_3, -\mathbf{1}_3\}, \quad Z_6 = Z_2 \times Z_3$

semi-direct product $G = G_1 \rtimes G_2 :\ \ \forall g_{\alpha\beta} \in G,\ \ g_{\alpha\beta} = \langle g_{1\alpha} g_{2\beta} \rangle,$ with $g_{1\alpha} \in G_1,\ \ g_{2\beta} \in G_2$

$g_{\alpha\beta} g_{\alpha'\beta'} = \langle g_{1\alpha} g_{2\beta} \rangle \langle g_{1\alpha'} g_{2\beta'} \rangle = \langle g_{1\alpha} \nu_{g_{2\beta}}(g_{1\alpha'}) g_{2\beta} g_{2\beta'} \rangle$

where $g_{2\beta} \to \nu_{g_{2\beta}}$ is a homomorphic map from G_2 to $\mathrm{Aut}(G_1)$,

$g_{1\alpha'} \to \nu_{g_{2\beta}}(g_{1\alpha'})$ is an isomorphic map from G_1 to G_1.

$(\langle g_{1\alpha} g_{2\beta} \rangle \langle g_{1\alpha'} g_{2\beta'} \rangle) \langle g_{1\alpha''} g_{2\beta''} \rangle = \langle g_{1\alpha} g_{2\beta} \rangle (\langle g_{1\alpha'} g_{2\beta'} \rangle \langle g_{1\alpha''} g_{2\beta''} \rangle), \quad e = \langle e_1 e_2 \rangle, \quad \langle g_{1\alpha} g_{2\beta} \rangle^{-1} = \langle \nu_{g_{2\beta}^{-1}}(g_{1\alpha}^{-1}) g_{2\beta}^{-1} \rangle$

G_1 is an invariant subgroup of $G = G_1 \rtimes G_2$. $\quad G = G_1 \rtimes (G/G_1), \quad D_3 = Z_3 \rtimes Z_2$