群论 第三讲 共轭类、不变子群与商群

- 若存在某个群元g，使得两个群元f与h可表达为：f=g^(-1)hg，则称f与h**共轭**。共轭具有对称性、传递性。

- 所有相互共轭的群元的集合称为**共轭类**。共轭类可用类中的任意一个元素来作为代表。

- 单位元自成一个共轭类。阿贝尔群的每个元素自成一个共轭类。

- **在一个共轭类中的所有元素的阶相同**。

- 对于g^(-1)(f共轭类)g，当g跑遍所有群元时，得到的仅是(f共轭类)中的所有元素。

- 不同的共轭类没有公共元素。不同的共轭类的元素数目不一定相同。群可以按共轭类作分割。

- D3群有3个共轭类：{e}, {d,f}, {a,b,c}.

- 对于任一群元，与它对易的所有群元的集合构成一个子群。

- 共轭类g的元素数目 = “与g对易的所有群元构成的子群” 的陪集数目。可见，共轭类的元素数目必须能整除群的阶，也即是说，**共轭类的元素数目是群的阶的因子**。

- 若存在某个群元g，使得两个子群H与K可表达为：$K=g^{-1}Hg$，则称H与K共轭。共轭子群也具有对称性、传递性。
- D3的子群{H1, H2, H3}互相共轭，而H4=Z3是自共轭子群（不变子群）。
- 已知H是G的子群，若对于G的任意群元g，都有 $g^{-1}Hg=H$ ，则称 H 是G的**不变子群**。
- 不变子群完整地包含了它的每个元素的共轭类的所有元素。即**不变子群是由共轭类组成的子群**。
- 阿贝尔群的任意子群都是不变子群。
- **不变子群的左陪集与右陪集重合**。
- **商群**G/H，是将不变子群H及其陪集看成它的元素，群元的乘法是：

$$(g_i H)(g_j H) = g_i g_j H$$

- 商群 D3/Z3 = Z2