Contents

1 同态正合序列 (exact sequence)

1.1 正规子群与商群

首先我们回顾正规子群的定义。设 H 是 G 的子群，则若对任何的 $g \in G$ 都有 $gHg^{-1} = H$，则 H 称为 G 的正规子群。正规子群的定义立刻导致两个推论，即

(a) 左右陪集相同，$gH = Hg$，因此左右陪集空间是一样的，并定义为商空间 G/H；

(b) 相应的商空间 G/H 可以从 G 继承群乘法结构，并构成商群。

其中，我们注意到两个近乎平凡的论断，第一是"H 是 G 的子集"，第二是"G/H 的元素 $[gH]$ 都对应一个 G 中 H 的陪集 gH"。我们可以把这两个论断表达为，存在一个单射 (injection)，称为"映入映射"(inclusion map) $\iota : H \to G$，以及满射 (surjection)，称为"投影映射"(projection) $\pi : G \to G/H$，使得 $\pi(gH) = [gH]$ (其中 ι 和 π 分别是"inclusion"和"projection"的希腊首字母)。那么根据同态核与 G/H 的定义，我们有

$$\mathrm{Im}\iota = \ker \pi \ , \tag{1.1}$$

因为 $\mathrm{Im}\iota = H \subset G$ 正是被视为 G/H 中的单位元，或者等价地说，整个 $\mathrm{Im}\iota$ 被 π 映射为单位元。

1.2 短正合序列

上面这些论断以及关系式 (1.1) 可以被重新组合为"短正合序列"(short exact sequence，有时"正合"也翻译为"恰当") 的概念。

考虑四个收尾相接的同态映射，

$$\{e\} \xrightarrow{\varphi_0} G_1 \xrightarrow{\varphi_1} G_2 \xrightarrow{\varphi_2} G_3 \xrightarrow{\varphi_3} \{e\} \ , \tag{1.2}$$

该序列是"正合的"说的是该序列每两个相邻映射都满足

$$\mathrm{Im}\varphi_i = \ker \varphi_{i+1} \ . \tag{1.3}$$

于是：

(a) 序列的左段 $\{e\} \xrightarrow{\varphi_0} G_1 \xrightarrow{\varphi_1} G_2$ 的正合性等价于 $e = \mathrm{Im}\varphi_0 = \ker \varphi_1$，即 φ_2 为单射；

(b) 序列的右段 $G_2 \xrightarrow{\varphi_2} G_3 \xrightarrow{\varphi_3} \{e\}$ 的正合性等价于 $\mathrm{Im}\varphi_2 = \ker\varphi_3 = G_3$，即 φ_3 为满射；

(c) 最后在中间的关系 $\mathrm{Im}\varphi_1 = \ker\varphi_2$ 正好可以写成 (1.1)，如果我们记单射 $\iota \equiv \varphi_1$ 以及满射 $\pi \equiv \varphi_2$。

有鉴于此，一般的短正合序列往往简单写成

$$0 \to G_1 \xhookrightarrow{\iota} G_2 \xrightarrow{\pi} G_3 \to 0\ . \tag{1.4}$$

写成这样的时候，我们已经清楚了左右段的正合性要求 ι 和 π 分别是单射和满射，最后我们只要记住还有中间段的正合性要求即可：$\mathrm{Im}\iota = \ker\pi$。由于 π 是同态，因此 $\ker\pi$ 必然是 G_2 的正规子群，从而 $G_1 = \mathrm{Im}\iota$ 也是 G_2 的正规子群。因此 G_2/G_1 是商群，而由同态核定理有

$$G_3 = G_2/\ker\pi = G_2/\mathrm{Im}\iota = G_2/G_1\ . \tag{1.5}$$

总结起来就是：

$$G_1 \triangleleft G_2,\ \text{and}\ \ G_3 = G_2/G_1 \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \to G_1 \xhookrightarrow{\iota} G_2 \xrightarrow{\pi} G_3 \to 0\ . \tag{1.6}$$

注意到，当 G_3 (或 G_1) 是平凡群的时候，短正合序列进一步退化成

$$0 \to G_1 \xrightarrow{\varphi} G_2 \to 0\ . \tag{1.7}$$

则序列的左段和右段的恰当性分别要求同态 φ 是单射以及满射，因此 φ 必然是同构，而满足这个退化正合序列的群 G_1 与 G_2 必然同构。

下面是一些常见的短正合序列有

$$0 \to 2\mathbb{Z} \xhookrightarrow{\iota} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \to 0\ , \tag{1.8}$$

$$0 \to \mathbb{Z} \xhookrightarrow{\iota} \mathbb{R} \xrightarrow{\exp(2\pi i x)} U(1) \to 0\ , \tag{1.9}$$

也自然有 $\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$，$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = U(1)$。

1.3 长正合序列与链复型

有短正合序列，便有长正合序列。一个长正合序列 E 即一系列首尾相接的同态映射

$$E: \qquad 0 \to G_1 \xrightarrow{\varphi_1} G_2 \xrightarrow{\varphi_2} \ldots \xrightarrow{\varphi_n} G_{n+1} \to 0\ , \tag{1.10}$$

并要求所有相邻的映射满足 $\mathrm{Im}\varphi_i = \ker\varphi_{i+1}$。当然，$\varphi_1$ 和 φ_n 已经自动被要求分别是单射和满射了。

一个常见的长正合序列是商空间的同伦群正合序列。考虑一个李群 G，以及 $H \le G$ 是 G 的子群；比如 $G = SU(2)$，$H = U(1)$ 等。则 H 对 G 的作用是“自由”(即没有不动点) 的。因此我们考虑商空间 G/H。一般而言，除非 H 是一个正规子群，商空间 G/H 只是一个光滑流形而不是一个群。于是我们有映射序列 $H \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} G/H$。那么，三个空间的各阶同伦群形成同伦正合序列

$$\ldots \pi_{k+1}(G/H) \to \pi_k(H) \to \pi_k(G) \to \pi_k(G/H) \to \pi_{k-1}(H) \to \ldots \to \pi_0(G/H) \to 0\ . \tag{1.11}$$

以 $G = SU(2)$，$H = U(1)$ 为例。我们知道 (将会知道) 有拓扑同胚 $SU(2) = S^3$，$SU(2)/U(1) = S^2$，即我们实际上在考虑 Hopf 主纤维丛 $S^1 \xhookrightarrow{\iota} SU(2) \xrightarrow{\pi} S^2$。我们有一小段同态正合序列

$$\pi_3(U(1)) \to \pi_3(SU(2)) \to \pi_3(SU(2)/U(1)) \to \pi_2(U(1)) \ . \tag{1.12}$$

注意到 $\pi_{n\geq 2}(U(1)) = 0$ (当然有 $\pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}$)，因此这个正合序列退化为

$$0 \to \pi_3(SU(2)) \to \pi_3(SU(2)/U(1)) \to 0 \ . \tag{1.13}$$

于是有群同构 $\pi_3(S^3) = \pi_3(S^2)$，而我们又有 $\pi_3(SU(2)) = \mathbb{Z}$，于是这个同构告诉我们 $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$。

这是高阶同伦群的非标准结果，相比 $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$ 是非常不直观的，但我们能够通过同伦正合序列来计算。

1.4 链复型与上同调

正合序列 E 里面对相邻同态的要求使得它们的复合满足 nilpotency 条件，即

$$\varphi_{i+1}\varphi_i(g \in G_i) = e \in G_{i+2} \ . \tag{1.14}$$

因此正合序列是非常特殊的“链复型”。

所谓链复型，即是即一个满足 $\varphi_{i+1}\varphi_i(g) = e$ 的同态序列。一般来说，$\varphi_{i+1}\varphi_i(g) = e$ 表明 $\mathrm{Im}\varphi_i \subset \ker\varphi_{i+1}$，即 $\mathrm{Im}\varphi_i$ 是 $\ker\varphi_{i+1}$ 的子群，而且是 $\ker\varphi_{i+1}$ 的正规子群。因此一般链复型与正合序列是不同的，其差别可以用“上同调群”$H^i(E) \equiv \ker\varphi_i/\mathrm{Im}\varphi_{i-1}$ 来刻画：当所有的 $H^i(E) = \{e\}$，则链复型是正合序列，否则就不是正合序列。

在数学物理中，最出名的链复型莫过于 de Rham 链复型。它是一个由 m 维流形 M 的各阶光滑微分形式空间作为 G_i 的同态序列，

$$0 \to \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \Omega^m(M) \to 0 \ . \tag{1.15}$$

其中 $\Omega^k(M) = \{\frac{1}{m!}\omega_{\mu_1\ldots\mu_k}dx^{\mu_1} \wedge \ldots dx^{\mu_k}\}$ 标记全体 M 上的 k 阶微分形式，是以光滑微分形式加法为群乘法所构成的无穷维交换群。同态 d 为标准的外微分算符，

$$d\Omega = \frac{1}{m!}\partial_\mu\omega_{\mu_1\ldots\mu_k}dx^\mu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_k} \tag{1.16}$$

它把一个 k 阶微分形式映射为 $k+1$ 阶微分形式，并明显满足同态的要求，即微分形式的加法在映射下得到保持。最重要的是，利用“求导顺序”可以交换这一事实，可以轻易证明 $d^2 = 0$，即这个同态序列满足链复型的定义。于是，一个“恰当形式”$\omega^{(k)} = d\lambda^{(k-1)}$ 必然是“闭形式”，即 $d\omega^{(k)} = 0$；但是反过来则不一定。

相应的，这个链复型与正合序列的差距可以用“上同调群”来刻画

$$H^k(M) \equiv \frac{\ker d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)}{\mathrm{Im} d : \Omega^{k-1}(M) \to \Omega^k(M)} \ . \tag{1.17}$$

更直观来说，$\Omega^k(M)$ 中的全体闭形式可以建立等价关系 $\omega^{(k)} \sim \omega^{(k)} + d\lambda^{(k-1)}$，然后 $H^k(M)$ 恰为全体不等价的闭合形式构成的集合；这个集合 $H^k(M)$ 从 $\Omega^k(M)$ 继承了加法，因此也构成一个交换群。这个交换群有两点重要性质：

(a) 其维度是有限的；这与 $\dim \Omega^k(M) = \infty$ 形成鲜明对比

(b) $H^k(M)$ 是 M 的同伦不变量。因此，也是拓扑不变量。

最后，链复型的 E 的“欧拉示性数”$\chi(E)$ 可以表达为 $\sum_i (-1)^i \dim H^i(E)$。对于 de Rham 复型，$\chi(E)$ 也是一个拓扑不变量。