厄米矩阵与复对称矩阵的自由度

显然，一个 $n \times n$ 的复矩阵，它的自由度是 $2n^2$

请问：

- 一个 $n \times n$ 的厄米矩阵，它的自由度是多少？
- 一个 $n \times n$ 的复对称矩阵，它的自由度是多少？

一个 n×n 的厄米矩阵的自由度是 n^2

证明方法一：考虑约束方程数目

考虑一个 $n\times n$ 厄米矩阵 A，由定义：$A^\dagger = A$，即 $A_{ij} = A_{ji}^*$

· 当 $i\neq j$ 时，例如 $A_{12}=A_{21}^*$，有 $\begin{cases} \mathrm{Re}\,A_{12} = \mathrm{Re}\,A_{21} \\ \mathrm{Im}\,A_{12} = -\mathrm{Im}\,A_{21}\end{cases}$

一共有 $C_n^2\times 2$ 条约束方程.

· 当 $i=j$ 时，例如 $A_{11}=A_{11}^*$，有 $\mathrm{Im}\,A_{11}=0$

一共有 n 条约束方程

合计有 $C_n^2\times 2+n=\frac{n(n-1)}{2}\times 2+n=n^2$ 条约束方程，

而 $n\times n$ 复矩阵原有参数数目是 $2n^2$，

因此，$n\times n$ 厄米矩阵的自由度是 $2n^2-n^2=n^2$

一个 n×n 的厄米矩阵的自由度是 n^2

证明方法二：直接数自由度

由 $A^\dagger = A$，即 $A_{ij} = A_{ji}^*$

- 当 $i=j$ 时，例如 $A_{11} = A_{11}^* \rightarrow A_{11} \in \mathbb{R}$

  n个实对角元一共有 n个自由度

- 当 $i \neq j$ 时，例如 $A_{12} = A_{21}^* \rightarrow A_{21}$ 完全由 A_{12} 决定

  而 A_{12} 有实部、虚部这2个自由度

所有的 $A_{ij}\ (i<j)$ 一共有 $C_n^2 \times 2 = \frac{n(n-1)}{2} \times 2 = n(n-1)$ 个自由度

总自由度是 $n + n(n-1) = n^2$

一个 n×n 的复对称矩阵的自由度是 n^2+n

证明方法一：考虑约束方程数目

考虑一个 $n\times n$ 复对称矩阵 B，由定义：$B^T=B$，即 $B_{ij}=B_{ji}$

· 当 $i\neq j$ 时，例如 $B_{12}=B_{21}$，有 $\begin{cases} \mathrm{Re}\,B_{12}=\mathrm{Re}\,B_{21} \\ \mathrm{Im}\,B_{12}=\mathrm{Im}\,B_{21} \end{cases}$

一共有 $C_n^2\times 2$ 条约束方程.

· 当 $i=j$ 时，例如 $B_{11}=B_{11}$，它自动成立，无约束方程.

因此，$n\times n$ 复对称矩阵的自由度是 $2n^2-C_n^2\times 2=2n^2-n(n-1)$

$$=n^2+n$$

一个 n×n 的复对称矩阵的自由度是 n^2+n

证明方法二：直接数自由度

由 $B^T=B$，即 $B_{ij}=B_{ji}$

- 当 $i=j$ 时，例如 $B_{11}=B_{11}$，自动成立，

  n 个复对角元一共有 2n 个自由度

- 当 $i\neq j$ 时，例如 $B_{12}=B_{21} \longrightarrow B_{21}$ 完全由 B_{12} 决定

  而 B_{12} 有实部、虚部这 2 个自由度

  所有的 $B_{ij}\ (i<j)$ 一共有 $C_n^2\times 2=n(n-1)$ 个自由度

总自由度是 $2n+n(n-1)=n^2+n$