1 库仑势的 $SO(4)$ 对称性

考虑哈密顿量

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}) \ , \tag{1.1}$$

其中 $p_i = -i\hbar\partial_i$, $V(\vec{r}) = -k/r$.

1. 由上面哈密顿量所描述的经典动力学系统正是在库仑势中运动的一个带电粒子。

2. 哈密顿量 H 只依赖到原点距离 r 而不显含 x_i，因此可以推断此系统至少有转动群 $SO(3)$ 作为对称群。

3. $SO(3)$ 共有 3 个生成元，因此可以推断该动力学系统必然有对应的 3 个守恒量，即 3 个方向的角动量 $L_i = \epsilon_{ijk}x_j p_k$。于是当 $(\vec{r}, \vec{p})$ 满足运动方程

$$\text{EOM}: \qquad p_i = m\frac{dx_i}{dt}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{kx_i}{r^3} \ , \tag{1.2}$$

的时候，$dL_i/dt = 0$.

事实上，该哈密顿量还有额外 3 个守恒量。定义物理量

$$A_i \equiv \frac{1}{m}\epsilon_{ijk}p_j L_k - \frac{kx_i}{r} \ . \tag{1.3}$$

注意利用 ϵ_{ijk} 的全反对称性可以得到 $A_i L_i = 0$.

下面证明此物理量也是守恒量。考虑 $\vec{r}, \vec{p}$ 满足运动方程。于是我们有:

$$\begin{aligned}
\frac{dA_i}{dt} &= \frac{1}{m}\epsilon_{ijk}\Big(-\frac{kx_j}{r^3}\Big)(\epsilon_{krs}x_r p_s) - \frac{k}{mr}p_i + \frac{kx_i}{r^2}\frac{dr}{dt} && (1.4)\\
&= -\frac{k}{r^3}\frac{1}{m}(\delta_{ir}\delta_{js} - \delta_{is}\delta_{jr})x_j x_r p_s - \frac{k}{mr}p_i + \frac{kx_i}{r^2}\frac{dr}{dt} && (1.5)\\
&= -\frac{k}{r^3}\frac{1}{m}(x_i(x_j p_j) - (x_j x_j)p_i) - \frac{k}{mr}p_i + \frac{kx_i}{r^2}\frac{dr}{dt} && (1.6)\\
&= -\frac{k}{r^3}\frac{1}{m}x_i(x_j p_j) + \frac{kx_i}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt} && (1.7)\\
&= -\frac{k}{r^3}\frac{1}{m}x_i(x_j p_j) + \frac{kx_i}{mr^2}\frac{x_j}{r}p_j && (1.8)\\
&= 0 \ . && (1.9)
\end{aligned}$$

考虑对哈密顿量进行量子化。此时 $p_i = -i\hbar\partial_i$，$L_i = \epsilon_{ijk}x_j p_k$ 作用在任意波函数 $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ 上。对于 A_i，我们定义

$$A_i \equiv \frac{1}{2m}\epsilon_{ijk}(p_j L_k - L_j p_k) - \frac{kx_i}{r} \ . \tag{1.10}$$

经典关系 $A_i L_i = 0$ 现在提升为算符方程 $A_i L_i = L_i A_i = 0$。另外有

$$A_i A_i = k^2 + \frac{2}{m}H(L_i L_i + \hbar^2) \ . \tag{1.11}$$

此时，可以证明以下对易关系：

$$
\begin{aligned}
&[H, L_i] = 0, \qquad [H, A_i] = 0 &(1.12)\\
&[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k, \qquad [L_i, A_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}A_k, &(1.13)\\
&[A_i, A_j] = -i\frac{2}{m}\hbar\epsilon_{ijk}L_k H\ . &(1.14)
\end{aligned}
$$

其中第一行描述 L 和 A 都是量子守恒量，即经典守恒方程 $d\vec{L}/dt = d\vec{A}/dt = 0$ 的量子对应。第二行描述 $\vec{L}$ 和 $\vec{A}$ 在 $SO(3)$ 群作用下如普通 3 维空间矢量那样转动，更特别的是，L_i 之间的对易关系表明 L_i 正好是 $SO(3)$ 生成元。

由于 L_i 和 A_i 与哈密顿量对易，因此 L_i 和 A_i 不会改变能量本征态的能量；即，若 $\mathcal{H}_E$ 是能量为 E 的能量本征态空间，则 L_i, A_i 作用在这个空间内部。换句话说，本征态空间构成 L_i, A_i 的表示空间。考虑某个 $\mathcal{H}_E$。在这空间上，定义 $\tilde{A}_i = \sqrt{-m/(2E)}A_i$，并定义

$$
\mathcal{L}_i \equiv \frac{1}{2}(L_i + \tilde{A}_i), \qquad \mathcal{R}_i \equiv \frac{1}{2}(L_i - \tilde{A}_i)\ . \tag{1.15}
$$

则显然有

$$
\begin{aligned}
&[H, \mathcal{L}_i] = [H, \mathcal{R}_i] = 0 &(1.16)\\
&\mathcal{L}^2 = \mathcal{R}^2 &(1.17)\\
&[\mathcal{L}_i, \mathcal{R}_j] = 0 &(1.18)\\
&[\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\mathcal{L}_k, \qquad [\mathcal{R}_i, \mathcal{R}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\mathcal{R}_k\ . &(1.19)
\end{aligned}
$$

最后一行表明，$\{\mathcal{L}_i\}$ 和 $\{\mathcal{R}_i\}$ 分别是两组交换的 $SO(3)$ 生成元：即，粗略的说，哈密顿量 H 与直积群 $SO(3)_L \times SO(3)_R$ 的生成元对易，系统的对称性实际上是更大的 $SO(3)_L \times SO(3)_R$。这个群与 $SO(4)$ 同构。回顾 $\mathcal{H}_E$ 是这个 $SO(3)_L \times SO(3)_R$ 的表示空间，应该分解为 $SO(3)_L \times SO(3)_R$ 的不可约表示，而这些不可约表示应该按照 $(\mathfrak{l}_L, \mathfrak{l}_R)$ 两个总角动量量子数标记。但实际上这两个总角动量受到算符方程 $\mathcal{L}^2 = \mathcal{R}^2$ 的约束，因此有 $\mathfrak{l}_L = \mathfrak{l}_R = \mathfrak{l}$，而 $\mathcal{L}^2$ 与 $\mathcal{R}^2$ 的本征值均为 $\mathfrak{l}(\mathfrak{l}+1)\hbar^2$。

注意到从算符方程 $A_iA_i = k^2 + \frac{2}{m}H(L_iL_i + \hbar^2)$ 出发可以得到

$$
\frac{-m}{2E}A_iA_i\psi = \frac{-m}{2E}k^2\psi + \frac{-1}{E}H(L_iL_i + \hbar^2)\psi = \frac{-m}{2E}k^2\psi - (L_iL_i + \hbar^2)\psi, \qquad \forall\psi \in \mathcal{H}_E\ , \tag{1.20}
$$

于是有

$$
(\tilde{A}_i\tilde{A}_i + L_iL_i)\psi = 4\mathcal{L}^2\psi = (-\frac{mk^2}{2E} - \hbar^2)\psi \tag{1.21}
$$

另外，左边的本征值为 $4\mathfrak{l}(\mathfrak{l}+1)\hbar^2$, $\mathfrak{l} \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$, 于是有

$$
4\mathfrak{l}(\mathfrak{l}+1)\hbar^2\psi = (-\frac{mk^2}{2E} - \hbar^2)\psi \Rightarrow (4\mathfrak{l}^2 + 4\mathfrak{l} + 1)\hbar^2\psi = -\frac{mk^2}{2E} \Rightarrow E = -\frac{mk^2}{(2\mathfrak{l}+1)^2\hbar^2}\ . \tag{1.22}
$$

即氢原子解的主量子数 n 由 $2\mathfrak{l}+1$ 给出。