① $\mathbb{Z}_n = \{1, 2, \cdots, n\} = \{i \mid i \in \mathbb{Z}_n\}$. 是个集合.

② $S_n \circlearrowright \mathbb{Z}_n$. 是 $\mathbb{Z}_n$ 的对称群 / 置换群

③ $\mathrm{Aut}(S_n) \underset{\text{同构}}{\circlearrowright} S_n$.

④ $A \in \mathrm{Aut}(S_n)$. $\sigma \in S_n$.

$$
\begin{aligned}
A: \quad S_n &\longrightarrow S_n \\
\sigma &\longrightarrow A(\sigma) \\
\tilde{\sigma}\sigma\tilde{\sigma}^{-1} &\longrightarrow A(\tilde{\sigma}\sigma\tilde{\sigma}^{-1}) = A(\tilde{\sigma})A(\sigma)A(\tilde{\sigma})^{-1} \\
[\sigma] &\longrightarrow [A(\sigma)] \quad \text{and} \quad |[\sigma]| = |[A(\sigma)]| \\
(ij) &\longrightarrow (i_1 j_1)(i_2 j_2)\cdots(i_k j_k), \text{ some } k.
\end{aligned}
$$

[注 $A((ij)(ij)) = A(e) = e$

$\qquad \| $

$A((ij))A((ij)) \Rightarrow A((ij))^2 = e$, order 2.]

$(ij) \xrightarrow{A_{\text{inner}}} (kl)$ [对换 $\xrightarrow{\text{inner}}$ 对换]

$(ij) \xrightarrow{\text{非 inner}}$ 非对换

⑤ $T_n^k = \{\underbrace{(i_1 j_1)(i_2 j_2)\cdots(i_k j_k)}_{2k\text{个互异的数}}\} \subset S_n$, 则

$$|T_n^k| = C_n^2 C_{n-2}^2 \cdots C_{n-2k+2}^2 = \frac{n!}{2^k (n-2k)!}$$

注意: T_n^k 自成共轭类.

⑥ 一般来说 $|T_n^1| \neq |T_n^{k>1}|$. 除非 $n=6$.

$\Rightarrow$ 若 $A \in \mathrm{Aut}$, A 不可能把共轭类 T_n^1 射到 $T_n^{k>1}$.

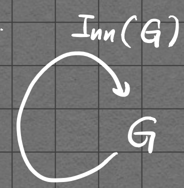
因为元素数量不一样.

$\Rightarrow \quad A(T_n^1) = T_n^1 \quad \Rightarrow \quad A$ 是 inner!

⑦ 当 $n \neq 2$, $\quad \mathrm{Inn}(S_n) = S_n$ 因为对一般 G.

$$G/C(G) = \mathrm{Inn}(G)$$

其中 $C(G)$ 为 $\{z \in G \mid gz = zg, \ \forall g \in G\}$ 为 G 的中心.



说明: 每一个 $\mathrm{Inn}(G)$ 的元素 inn 都找到 $g_0 \in G$. s.t.

$$\mathrm{inn}_{g_0}(g) = g_0 \, g \, g_0^{-1}$$

即 $\mathrm{Inn}: G \longrightarrow \mathrm{Inn}(G)$ 是满射, $\quad \mathrm{Inn}(g_0) = \mathrm{inn}_{g_0} \quad \mathrm{Inn}(G)$

且 Inn 是同态: $\quad \mathrm{Inn}(g_0 g_0') \equiv \mathrm{inn}_{g_0 g_0'} \in \mathrm{Inn}(G)$ 作用在 g 上有

$$\mathrm{inn}_{g_0 g_0'}(g) = (g_0 g_0') \; g \; (g_0 g_0')^{-1}$$

$$= \mathrm{inn}_{g_0} \circ \mathrm{inn}_{g_0'}(g)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Inn}(g_0 g_0') = \mathrm{Inn}(g_0) \circ \mathrm{Inn}(g_0')$$

Inn(G) 中的群乘法是映射复合.

但 Inn 不一定是单射: 可能有 inn_{g_0} 与 $\mathrm{inn}_{g_0'}$ 对所有的 g 都相同作用, 即,

$$\mathrm{inn}_{g_0}(g) = \mathrm{inn}_{g_0'}(g), \qquad \forall g \in G$$

$$\Rightarrow \quad g_0 \, g \, g_0^{-1} = g_0' \, g \, g_0'^{-1} \qquad \forall g$$

$$\Rightarrow \quad g = (g_0^{-1} g_0') \; g \; (g_0^{-1} g_0')^{-1} = \mathrm{inn}_{g_0^{-1} g_0'}(g), \quad \forall g$$

$\Rightarrow \quad g_0^{-1} g_0'$ 与所有群元都交换

$\Rightarrow \quad g_0^{-1} g_0' \in C(G)$, 且 $\mathrm{Inn}(g_0^{-1} g_0') = \mathrm{Id}$.

$\Rightarrow$ 即 $\quad C(G) = \ker \mathrm{Inn}$ $\quad$ Inn的核 $\quad$ (同态 $G \xrightarrow{\mathrm{Inn}} \mathrm{Inn}\, G$)

$\Rightarrow \quad \mathrm{Inn}(G) = G/\ker \mathrm{Inn} = G/C(G)$ $\quad$ (同态核定理).

而对 $S_{n\neq 2}$， $C(S_n)=\{e\}$. 因此

$$Aut(S_n) \overset{n\neq 6}{=\!=} Inn(S_n) \overset{n\neq 2}{=\!=} S_n.$$

$\Rightarrow$ $n\neq 2,6$ 时 $Aut(S_n)=Inn(S_n)=S_n$.

⑧ 若 $Aut\,G \neq Inn\,G$. 则 $Inn\,G$ 是 $Aut\,G$ 的正规子群.
有商群

$$Out(G)=\frac{Aut(G)}{Inn(G)}.$$

⑨ 当 $n=6$ 时. $Out(S_n)\neq\{e\}$.

⑩ 当 $n=2$ 时. $C(S_2)=S_2 \Rightarrow Inn(S_n)=\{e\}\neq S_2$
另一方面 $Aut(S_2)$ 也是 $\{e\}$. 因为

S_2	e	-1
$Id=\varphi$	e	-1